Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

Campus Alto Paraopeba - CAP

André Tavares Gonçalves

Teoria dos Jogos como ferramenta de ensino

Dissertação apresentada ao Departamento de Física e Matemática da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em rede Nacional, PROFMAT.

Orientador: Dr. Mauricio Reis e Silva Junior

Ouro Branco
2017

Dissertação de Mestrado defendida em 31 de março de 2017 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Professores.

Prof. Dr. Maurício Reis e Silva Júnior
Universidade Federal de São João del-Rei

Profa. Dra. Andréia da Silva Coutinho
Universidade Federal de Lavras

Prof. Dr. Telles Timóteo da Silva
Universidade Federal de São João del-Rei

RESUMO

André Tavares Gonçalves [1]
Maurício Reis e Silva Júnior[2]

O presente estudo aborda a Teoria dos Jogos e sua aplicabilidade, com exemplo de inserção prática da teoria no ensino de matemática nos 6º e 7º anos do ensino fundamental. A ideia central buscou identificar o poder de percepção dos alunos em detectar a melhor estratégia que os fizessem ganhar o jogo a partir da melhor escolha, sem que tivessem conhecimento da teoria que envolve uma ação estratégica. Os resultados obtidos na experiência vivenciada mostram os alunos se envolvendo de forma diferenciada, mas com boa assimilação geral dos elementos de linguagem matemática ilustrados através do caso em questão.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos. Raciocínio lógico-matemático. Tomada de decisão.

ABSTRACT

The present study approaches the Game Theory and its applicability, with example of practical insertion in Mathematics teaching in the final years of elementary school (6th and 7th grades). The central idea was to identify the power of students perception in detecting the best strategy that could lead them to winning the game, starting from the best choice, without previous knowledge of the theory envolving strategic action. The results obtained in the experience shows students getting involved in different ways; but in all cases they have shown good general assimilation of elements of mathematics language, illustrated by the given case.

key-words: Game Theory. Logical mathematical reasoning. Decision-making.

1 Introdução

Este trabalho aborda os fundamentos da Teoria dos Jogos aplicada junto a alunos do ensino fundamental. A motivação para a realização de um estudo desta natureza centra-se no entendimento de que o conhecimento matemático e o raciocínio lógico dos alunos devem ser iniciados já nas primeiras séries dos anos finais do ensino fundamental e encontra-se na Teoria dos Jogos um caminho para estimular a reflexão e a análise lógica para solucionar problemas. Entende-se que, ao propor ao aluno situações desafiadoras desde cedo, ele construirá seu conhecimento matemático de forma crítica e lógica, diminuindo possíveis dificuldades na aprendizagem.

[1]Aluno de Mestrado do PROFMAT, Turma 2015, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ, professorandre@setelagoas.com.br

[2]Professor orientador, Departamento de Física e Matemática - DEFIM, UFSJ, mreis@ufsj.edu.br

O estudo desenvolvido tem natureza qualitativa, composto por duas etapas: embasamento teórico e atividade prática de uma oficina de matemática, com a finalidade de aproximar os alunos do ensino fundamental à Teoria dos Jogos. Para efetivar o estudo contou-se com a participação de alunos dos 6º e 7º anos do Ensino fundamental em idade de 11 a 13 anos de uma escola da rede Sesi de Ensino de Sete Lagoas/MG.

Como instrumento de coleta de dados, optou-se pela aplicação de um desafio matemático com um propósito pré-estabelecido: escolher a melhor estratégia para maximizar ganhos e minimizar perdas, numa situação envolvendo duas empresas hipotéticas X e Y (alunos jogadores as representando).

A intencionalidade do estudo centrou-se na confirmação de que a inserção da Teoria dos Jogos pode ser incorporada à prática educativa do professor de matemática no ensino fundamental. Seja no momento em que propõe ao aluno a reflexão na tomada de decisão ou num momento de interação com os colegas que participarão de decisões coletivas que envolvam cálculos matemáticos.

Os resultados obtidos na experiência vivenciada apontam para o fato de que os alunos assimilam as informações de forma diferenciada, com aprofundamentos e observações divergentes, o que não interfere no aprendizado da Teoria dos Jogos ou a inviabiliza como ferramenta ilustrativa de conceitos matemáticos mais básicos. O que pode vir a ocorrer é a necessidade de trabalhar melhor o desenvolvimento do raciocínio matemático do aluno, expondo-o a um número maior e constante de situações de análise de decisões.

O presente trabalho se divide em seis seções ordenadas: seção um, reservada para a introdução do trabalho, composta pela apresentação da temática, objetivos propostos a serem alcançados com o estudo, a metodologia aplicada, sua intencionalidade e identificação do universo onde se efetuou a pesquisa e perfil dos participantes. Na seção dois, apresenta-se breve histórico da Teoria dos Jogos e seu surgimento, bem como os conceitos fundamentais que levam à sua compreensão. Em seguida, na seção três, são relatadas as principais definições sobre a Teoria dos Jogos que levam à melhor compreensão da estratégia na tomada de decisão em uma situação de jogo. Na seção quatro, são ilustrados exemplos de jogos e aplicação da Teoria dos Jogos para sua resolução, tendo como fonte principal de embasamento a obra de L. C. Thomas. Games, *Theory and Applications*(2003). Na seção cinco, registra-se a experiência prática configurada em Oficina de Matemática realizada como os alunos do ensino fundamental, onde se construiu uma situação hipotética de jogo para trabalhar a Teoria dos Jogos. Essa atividade foi realizada em duas etapas: participação ativa dos alunos numa situação de jogo e avaliação da experiência vivenciada feita por dois representantes de cada turma. A seção seis registra as conclusões do estudo de caso realizado e opinião pessoal do autor.

2 A Teoria dos Jogos

Nessa seção abre-se espaço para uma breve apresentação do surgimento da Teoria dos Jogos e os conceitos fundamentais apresentados por estudiosos que contribuem para o seu entendimento e domínio na prática.

2.1 História da Teoria dos Jogos: conceitos fundamentais.

Na primeira metade do século XX, principalmente até os anos 40, estava sendo desenvolvida a Pesquisa Operacional, da qual a Teoria dos Jogos faz parte.

A Pesquisa Operacional surgiu para atender demandas industriais e militares. O objetivo era determinar a viabilidade, maximizar resultados positivos e minimizar perdas. Assim, a Pesquisa Operacional trata de como otimizar a sua decisão gerencial e, estando esta quase unicamente ligada a um processo industrial, as suas variáveis são totalmente acessíveis e através disso é possível construir um processo decisório tão objetivo como se queira.

Entretanto, ficava aberta a questão sobre como decidir, como tomar uma decisão gerencial objetivamente quando há outros participantes dessa decisão, neste caso em posições análogas de gerenciamento, cujas decisões podem afetar diretamente o resultado do processo.

Em particular, tais problemas surgiam em decisões em que havia conflito de interesse ou quando dois ou mais grupos ou entes deveriam tomar decisões baseadas no que outros poderiam ter que tomar. Na mesma época estava sendo desenvolvida a formalização matemática da micro e macroeconomia.

Assim, em 1944, os matemáticos John Von Neumann (1903-1957) e Oskar Morgenstern (1902-1977) lançaram o livro *Theory of Games and Economic Behavior* (Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico), onde as escolhas racionais e os acontecimentos sociais eram interpretados a partir do uso de modelos de jogos de estratégia, observando-se a tomada de decisão que resultasse em maior retorno, ou seja, que lhes fossem mais vantajosas, de acordo com um cálculo acerca de sua probabilidade e satisfação máxima de sua utilidade (VITORINO FILHO, SACOMANO NETO, ELIAS, 2009).

De acordo com a narrativa dos autores, a teoria desenvolvida se embasava sob os fortes alicerces matemáticos e propôs uma nova maneira de formalizar os princípios das ciências sociais, a partir do comportamento e preferências humanas, sem precisar se reduzir a outros domínios estranhos, como a biologia e a física (VITORINO FILHO, SACOMANO NETO, ELIAS, 2009). Neumann e Morgenstern (1944) definiram a Teoria dos Jogos como uma ciência da estratégia com o intuito de determinar matemática e logicamente as atitudes dos jogadores.

Ainda sobre o desenvolvimento da Teoria dos Jogos, em 1949, aos 21 anos, John Forbes Nash(1928-2015) escreveu uma Tese de doutoramento que, 45 anos mais tarde, lhe daria o Prêmio Nobel de Economia. O trabalho, conhecido como o "Equilibrio de Nash"(Noncooperative games) iria revolucionar o estudo da estratégia econômica. Nash aplicou os seus avanços na Teoria dos Jogos para analisar estratégias diplomáticas e militares.

Em 1994 recebeu, juntamente com John Charles Harsanyi e Reinhard Selten, o Prêmio Nobel da Economia pelo seu trabalho na Teoria dos Jogos (Theory of Non-cooperative Games).

Na análise feita em torno das concepções dos criadores da Teoria dos Jogos:

> [...] Para alguns jogos, a teoria pode indicar uma "solução" para o jogo, isto é, a melhor maneira a proceder para cada pessoa envolvida. No entanto, na maioria dos jogos que descrevem problemas reais, ela só nos fornece uma visão geral da situação, descartando algumas "jogadas" que não levarão a bons resultados VITORINO FILHO, SACOMANO NETO, ELIAS (2009, p.08).

A Teoria dos Jogos é uma teoria matemática criada para se modelar fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais "tomadores de decisão" interagem entre si. A Teoria dos Jogos fornece a linguagem para a descrição de processos de decisão conscientes e objetivos envolvendo mais do que um indivíduo(SARTINI et al., 2004).

> A teoria dos jogos pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob condições de conflito. O elemento básico em um jogo é o conjunto de jogadores que dele participam. Cada jogador tem um conjunto de estratégias. Quando cada jogador escolhe sua estratégia, temos então uma situação ou perfil no espaço de todas as situações (perfis) possíveis. Cada jogador tem interesse ou preferências para cada situação no jogo. Em termos matemáticos, cada jogador tem uma função utilidade que atribui um número real (o ganho ou *payoff* do jogador) a cada situação do jogo(SARTINI et al., 2004, p.04-06).

Para Fiani (2006), a Teoria dos Jogos ajuda a entender tecnicamente o processo de decisão dos jogadores que interagem entre si, observada a situação do jogo em que estão envolvidos, com ações lógicas. Apontam Sartini et al.(2004, p.09) que "uma solução de um jogo é uma prescrição ou precisão sobre o resultado do jogo". Basicamente esta prescrição sobre o resultado do jogo diz respeito sobre atribuir um valor para o jogo e determinar as estratégias válidas a partir da exclusão de estratégias que não tragam resultado interessante (análise de dominância).

3 Teoria dos Jogos: principais definições e soluções em casos simples

Nesta seção são elencadas definições acerca da Teoria dos Jogos que devem ser consideradas para compreender uma situação de jogo.

Definição 3.1. ***Jogos*** *são situações onde há interação estratégica entre dois ou mais jogadores e o resultado final para cada um desses é determinado pelo conjunto de estratégias tomadas por eles.*

Definição 3.2. ***Agentes*** *ou* ***jogadores*** *são indivíduos ou grupo de indivíduos que participam das situações estratégicas e cujas decisões e interações podem influenciar o resultado do jogo.*

Definição 3.3. *Uma* ***estratégia*** *é um conjunto de ações programáveis adotadas por um jogador de modo a obter determinado resultado final para o jogo.*

Como exemplo de jogos, jogadores e estratégias pode-se citar:

Uma compra de um produto: o consumidor pode tentar comprar por um preço mais barato, num processo de barganha, ao passo que o vendedor pretende manter o preço do produto o mais alto possível sem perder a chance de venda. Isto é um jogo pois envolve interação estratégica entre os agentes. O vendedor pode pensar em não vender por menos da metade do preço que ofertou.O comprador pode pensar em ofertar sempre dois terços do valor nominal e, em caso de recusa, planeja acrescentar 10% do valor nominal.

Observa-se que as estratégias descritas se referem a planos de ação predeterminados e a escolha delas, por cada parte, determina o resultado final do jogo.

Um casal resolve fazer um programa à noite: ir a um jogo de futebol ou ir ao cinema. Cada um tem as suas estratégias para convencer o outro a escolher determinado programa. Pode ser visto como conflituoso ou pode haver caminho para cooperação. As estratégias dizem respeito a como cada um vai abordar os benefícios da escolha que se deseja fazer e em que termos os dois vão ou não cooperar.

Exemplo de não jogo: loteria, pois não envolve estratégia, envolve apenas a aleatoriedade dos números escolhidos.

Definição 3.4. *Um jogo é considerado de **informação completa** se todas as estratégias disponíveis para os jogadores forem totalmente conhecidas por todos os jogadores.*

Definição 3.5. *Um jogo de **soma zero** entre dois jogadores é aquele em que o ganho de um jogador é exatamente o que o outro perde ou deixa de ganhar.*

Sempre que a soma dos ganhos dos dois jogadores for igual a um valor fixo, independente da escolha das estratégias de cada um, temos um jogo de soma zero. Se p_I é o pagamento do jogador I e p_{II} o pagamento do jogador II, um jogo de soma zero deve satisfazer $p_I + p_{II} = E$ para quaisquer escolhas de pares de estratégias dos dois jogadores. Convencionalmente, usa-se definir os ganhos de cada jogador em um jogo de soma zero, de forma que o ganho do jogador I, p_I^*, é sempre o negativo do ganho do jogador II, p_{II}^*. Isto pode ser feito, por exemplo, reajustando-se os valores:

Se

$$p_I + p_{II} = E$$

$$p_I^* = p_I - E = -p_{II}$$

$$p_{II}^* = p_{II}$$

logo

$$p_I^* + p_{II}^* = 0,$$

Como exemplo, tem-se:

Exemplo 3.1. *Dois piratas estão disputando um pote contendo 5 quilos de ouro, cada qual com suas estratégias específicas, definindo assim um jogo. Após a escolha e a execução das estratégias de cada parte, o primeiro pirata se apossou de 3 quilos de ouro e o segundo pirata pegou o restante.*

Percebe-se nesse momento que se trata de um jogo de soma zero, e se necessário, para fins da análise do jogo, pode-se redefini-lo a um novo patamar, em que os ganhos de cada um serão analisados, pois o que um pirata pegou é exatamente o que o outro deixou de pegar. Dessa forma:

$$p_I : \text{pagamento do pirata I}$$

$$p_{II} : \text{pagamento do pirata II}$$

pois $(p_I - E) + p_{II} = E \to p_I + p_{II} = 0$. Ou ainda pode-se dividir o valor E em parcelas iguais ao número de jogadores:

$$p_I^* = p_I – (E/2) \to p_{II}^* = p_{II} – (E/2).$$

A definição do número E ou $(E/2)$ não influencia no resultado do jogo. Apenas na forma de interpretação e explicação da situação: enquanto na primeira, o E refere-se apenas ao valor total, na segunda o $(E/2)$ refere-se ao valor total dividido igualmente entre os dois jogadores, numa proposta de divisão exata para justificar a soma zero durante a resolução matemática. Em termos numéricos do exemplo do pirata, tem-se $p_I = 3kg, p_{II} = 2kg, p_I + p_{II} = 3 + 2 = 5, E = 5kg$. Então:

$$p_I^* = p_I – E \to p_I^* = 3 - 5 \to p_I^* = -2.$$
$$p_{II}^* = p_{II} = 2kg \to p_I^* + p_{II}^* = 2 + (-2) = 0,$$

demonstrando assim os valores simétricos, opostos, com soma zero.

Um outro exemplo pode ser dado como:

Exemplo 3.2. *Investimento das empresas X e Y.*

Suponha duas empresas: a empresa X, com as estratégias X_1,X_2, X_3, X_4 e a empresa Y, com as estratégias Y_1, Y_2, Y_3. Através das suas estratégias de investimentos e lançamentos de produtos, o faturamento de uma é exatamente igual ao que a outra deixa de faturar, de tal forma que esta situação pode ser representada por uma matriz, em que cada elemento é representado como um par ordenado de números simétricos:

	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	$(-3, 3)$	$(2, -2)$	$(4, -4)$
X_2	$(8, -8)$	$(-3, 3)$	$(6, -6)$
X_3	$(0, 0)$	$(4, -4)$	$(9, -9)$
X_4	$(5, -5)$	$(-7, 7)$	$(-1, 1)$

Tabela 1: Tabela do exemplo 3.2

Análise

A matriz do exemplo é um jogo, pois há interação de estratégias e conflitos de interesses entre dois jogadores, em que cada um pode escolher uma ação para movimento ou lance. É uma matriz de informação completa, pois os dois jogadores conhecem todas as estratégias disponíveis. É um jogo de soma zero, pois o ganho de um jogador é exatamente o que o outro perde. Existem dois conjuntos de estratégias na matriz de *payoff* (recompensa) , em que a reunião das escolhas efetivadas em um jogo pode ser representada por um vetor de estratégia. A partir dos dados disponíveis, cada jogador se utilizará de informações na matriz para obter a recompensa desejada no jogo, ou seja, o valor dado a um determinado resultado.

Após essa análise, pode-se progredir no estudo e resolução de jogos envolvendo dois jogadores com inúmeras estratégias, numa matriz do tipo $m \times n$.

A seguir, descreve-se a mesma matriz, só que com o payoff representando apenas os ganhos do jogador X, que é da forma que os jogos geralmente são descritos:

	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	-3	2	4
X_2	8	-3	6
X_3	0	4	9
X_4	5	-7	-1

Tabela 2: Tabela com *payoff* do Jogador X do exemplo 3.2

Definição 3.6. *Um jogo de informação completa, de soma zero, entre dois jogadores, cada qual com um conjunto discreto e finito de estratégias é caracterizado por:*

a) Dois conjuntos de estratégias:
$(I_1, I_2, ..., I_m)$*, do jogador I e* $(II_1, ..., II_n)$ *do jogador II.*

b) Uma matriz $m \times n$ *de recompensas (payoff) cujos elementos* g_{ij} *indicam a recompensa para o jogador I quando este escolhe estratégia* I_i *e o jogador II escolhe estratégia* II_j*.*

	Jogador II			
JogadorI	II_1	II_2	$\cdots$	II_n
I_1	g_{11}	g_{12}	$\cdots$	g_{1n}
I_2	g_{21}	g_{22}	$\cdots$	g_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
I_m	g_{m1}	g_{m2}	$\cdots$	g_{mn}

Tabela 3: Exemplo de tabela de recompensas.

Como exemplo, cita-se:

Exemplo 3.3. *As companhias farmacêuticas.*

Duas companhias A e B vendem duas marcas de vacina para gripe. A Companhia A pode anunciar o seu produto no rádio (estratégia A_1), na televisão (estratégia A_2) ou no jornal (estratégia A_3). A Companhia B pode anunciar o seu produto no rádio (estratégia B_1), na televisão (estratégia B_2), no jornal (estratégia B_3) ou mala direta (estratégia B_4). Dependendo da criatividade e da intensidade dos anúncios, cada companhia pode ganhar uma porção do mercado da outra companhia. A matriz de *payoff* a seguir resume a porcentagem de mercado ganho ou perdido pela companhia A, sabendo-se que a porcentagem de ganho ou perda de mercado da companhia B será o valor simétrico ao representado na matriz. Por exemplo, pega-se o cruzamento A_1 e B_1, em que as duas companhias decidem anunciar seu produto no rádio. Como o valor expresso na matriz é 8, isso quer dizer que a companhia A ganhará 8% do mercado da companhia B, que perderá os mesmos 8% de mercado.

Isto é um jogo, pois há interação estratégica entre dois jogadores, em que cada jogador visa a otimização de seus resultados. Mais especificamente, trata-se de um jogo de soma zero, pois o que um jogador ganha é o que o outro perde. Além disso, é um jogo de informação

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	-2	9	-3
A_2	6	5	6	8
A_3	-2	4	-9	5

Tabela 4: Matriz do exemplo 3.3.

completa, pois todas as estratégias disponíveis para os jogadores são totalmente conhecidas por eles.

Definição 3.7. *Em um jogo de duas pessoas, soma zero, de informação completa, uma estratégia I_i* ***domina*** *uma estratégia I_j se $g_{ik} \geq g_{jk}, \forall k$ na matriz de recompensas. Caso a desigualdade seja válida para todo k, diz-se que a estratégia I_i* ***domina estritamente*** *a estratégia I_j.*

Uma vez que um determinado jogador pode sempre escolher uma estratégia que irá lhe assegurar melhor resultado que outra, não há por que considerar estratégias dominadas por ocasião da análise do jogo. Uma solução obtida após a eliminação de estratégias dominadas continua sendo solução do jogo original. Caso seja usado unicamente o critério de dominância estrita no processo de eliminação de estratégias, todas as soluções do jogo original são preservadas.

Para exemplificar:

Exemplo 3.4. *Dominância*

Considere o seguinte jogo 3×5:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 & \mathrm{II}_3 & \mathrm{II}_4 & \mathrm{II}_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}
\end{array} \tag{1}
$$

As recompensas de II_4 e II_5 são as mesmas para todas as estratégias de I e, portanto, não importa qual estratégia II usa entre estas duas. Estas são estratégias duplicadas e, obviamente pode-se remover uma delas, por exemplo, II_5.Isto não afetará o valor do jogo.

Analisando agora II_1 e II_4, não importa o que se faça, o retorno para I é sempre o mesmo ou menor de II_1 em relação a II_4. Assim, II sempre escolherá II_1 em vez de II_4. Thomas (2003) afirma que II_1 domina II_4. E assim pode-se remover II_4 do conjunto de estratégia, porque nenhum jogador decidiria por essa estratégia. Da mesma forma, II_2 domina II_3, já que $5 < 6$, $2 < 3$ e $4 < 5$. Assim, o conjunto de estratégias de II pode ser pensado apenas com as estratégias II_1, II_2 e suas possibilidades de escolhas, como demonstrado na matriz a seguir:

$$\mathrm{II}_1 \quad \mathrm{II}_2$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_3 \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Orienta Thomas (2003) que voltando-se para I, fica evidente que o jogador preferiria jogar I_1 todas as vezes em relação a I_2, pois $4 \geqslant 4$ e $5 > 2$, reduzindo novamente o jogo por dominação da estratégia I_1 sobre a estratégia I_2. É possível também eliminar a estratégia I_3, pois I_1 domina I_3 no jogo original, ou seja, $4 > 2$ e $5 > 4$.

Assim, enquanto II tinha cinco estratégias puras e percebeu que nunca iria jogar II_3, II_4 ou II_5, pode, a partir da redução de estratégias dominadas, concentrar-se no jogo reduzido para pensar suas próprias estratégias. O mesmo aconteceu com o jogador I, reduzindo as estratégias I_2 e I_3. Dessa forma o jogo é reduzido para:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \mathrm{I}_1 & \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \tag{3}$$

Análise

E nesse jogo é óbvio que II_1 domina II_2, pois o jogador II vai querer perder o mínimo possível, sabendo que o valor 4 e 5 refere-se ao que o jogador I ganha (e simetricamente ao que o jogador II perde). Assim, sobram as estratégias I_1 e II_1 e o valor 4 como a solução deste jogo, reduzido a uma matriz 1×1.

Enfim, usando dominância nas estratégias de um jogador, pode-se obter um jogo reduzido. E isso pode ser feito iterativamente, até chegar a um estágio onde não podemos remover mais estratégias por dominância. Nem sempre se chega a um jogo de 1×1, mas muitas vezes diminui-se o tamanho do jogo consideravelmente.

No exemplo acima, chegou-se à conclusão de um valor (4) e a determinação de estratégias que levam àquele valor. Isso não significa que o jogo real sempre reproduza essa conclusão, mas observa-se que chegamos a ele por argumentos objetivos, comparando diretamente estratégias e supondo o ponto de vista racional, em termos de perdas e ganhos, para selecionar uma ou outra estratégia. Isso representaria, em outras palavras, a solução mais "conservadora"por assim dizer. Para prosseguirmos, devemos esclarecer o que vem a ser a solução para um jogo. Para compreender os termos dessa suposta solução, é necessário expandir nosso "universo"de estratégias possíveis.

Definição 3.8. *Seja $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ um conjunto de números reais não-negativos satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\,.$$

*Uma **estratégia mista** para o jogador I é especificada pelo vetor $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, onde x_i é a proporção de vezes, isto é, frequência relativa ou probabilidade em que a estratégia I_i é escolhida. Analogamente, uma estratégia mista para o jogador II é designada por $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, onde y_i é a probabilidade de que a estratégia II_i seja escolhida.*

O jogador deve perceber que nem sempre precisa escolher unicamente uma estratégia ou somente outra, em todas as suas decisões de jogo. Ele pode distribuir a probabilidade dessas escolhas de estratégias. Muitas vezes o valor esperado do jogo não precisa ser fixo num extremo de uma estratégia ou no extremo de outra. Este valor pode combinar as possíveis estratégias com probabilidades, de forma comparativa entre duas ou mais estratégias, e, com uma certa probabilidade em cada uma, isso pode maximizar o valor esperado do resultado do jogo.

Pode-se exemplificar a situação:

Exemplo 3.5. *Aviões e Baterias de mísseis*

Thomas (2003) propõe o seguinte exercício: o jogador I tem dois aviões; o jogador II tem quatro baterias de mísseis para cobrir quatros aproximações de um alvo. Cada bateria consegue atirar para cima, com garantia de acertar em um avião, se ele atacar durante a aproximação, mas somente em um avião, já que o tempo de recarregar é demorado. O pagamento para I é 1 se um avião passar e destruir o alvo, caso o contrário, 0.

As estratégias mistas ocorrem quando se descreve a distribuição das baterias de mísseis e dos aviões, ou seja, as possibilidades de abordagem e colocação de cada um dos jogadores no espaço de batalha. Dessa forma, as estratégias para I são:

- I_1 – mandar os aviões em abordagens diferentes;
- I_2 – mandar os aviões na mesma abordagem.

Enquanto que as estratégias para II são:

- II_1 – pôr uma bateria de mísseis em cada abordagem
- II_2– pôr duas baterias de mísseis em duas abordagens.
- II_3 – pôr duas baterias de mísseis em uma mesma abordagem e uma bateria em cada duas outras abordagens.
- II_4 – pôr três baterias de mísseis em uma abordagem e uma bateria de mísseis em uma outra abordagem.
- II_5 – pôr quatro baterias de mísseis em uma mesma abordagem.

Para determinar o valor de cada elemento da matriz, com *payoff* para o jogador I, basta confrontar as abordagens definidas, analisando as probabilidades:

Para a estratégia I_1:

$I_1 \times II_1 = 0$ Em todas as abordagens os aviões são abatidos

$I_1 \times II_2 = \frac{5}{6}$ Os aviões vencem em 5 das 6 possibilidades
$I_1 \times II_3 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ Os aviões vencem metade das vezes
$I_1 \times II_4 = \frac{5}{6}$ Os aviões vencem em 5 das 6 possibilidades
$I_1 \times II_5 = 1$ Os aviões sempre vencem, porque pelo menos um avião não será atingido em todas as possibilidades.

Para a estratégia I_2:
$I_2 \times II_1 = 1$ Os aviões sempre vencem, porque pelo menos um avião não será atingido em todas as possibilidades.
$I_2 \times II_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ Os aviões vencem metade das vezes
$I_2 \times II_3 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ Os aviões vencem 75% das vezes
$I_2 \times II_4 = \frac{3}{4}$ Os aviões vencem 75% das vezes
$I_2 \times II_5 = 0$ Em todas as abordagens os aviões são abatidos

A matriz de pagamento é:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} II_1 & II_2 & II_3 & II_4 & II_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\tag{4}
$$

Essa matriz é explicada da seguinte forma: contra I_1, II_1 é obrigado a atirar em ambos aviões, enquanto que II_5 nunca poderá fazer isso. Para II_2 e II_4, a única hora em que ambos os aviões levam um tiro é se as armas estão cobrindo os pares particulares de abordagens que eles escolheram. Já que são seis maneiras de fazer um par de abordagens de quatro diferentes abordagens, a chance de um avião atravessar é de $\frac{5}{6}$. Para II_3, um avião vai atravessar se voar junto com a abordagem indefesa e das seis possíveis abordagens, três delas incluem uma abordagem específica, e então a chance de sucesso é 3 de 6. Contra I_2, II_1 não pode atirar no segundo avião, enquanto que II_2 pode defender com sucesso duas das quatro abordagens e então a chance de um avião atravessar é de $\frac{2}{4}$. II_3, II_4 e II_5 defendem apenas uma abordagem contra I_2 e então a chance de uma avião se safar é $\frac{3}{4}$.

Uma situação de jogo pode ser descrita como:

Suponha que o jogador I decida variar suas estratégias entre (I_1, I_2) confrontadas apenas à estratégia II_2 do jogador II.

Dessa forma o jogador I decidiu enviar aviões pela estratégia I_1 em 70% das vezes, dentre os vários ataques que pretende fazer, sendo cada ataque com dois aviões, conforme previsto no enunciado. Dessa forma, tem-se

$$\text{Estratégia ótima de } I =$$

$$p(I_1) + p(I_2) = 1$$

$$p(I_2) = 1 - p(I_1)$$

$$p(I_2) = 1 - 0,7$$

$$p(I_2) = 0,3$$

Sabendo-se que os confrontos:

$$I_1 \times II_2 = \frac{5}{6}$$

e

$$I_2 \times II_2 = \frac{1}{2}$$

Temos que a estratégia definida do jogador I é $(p, 1-p)$ com as especificações citadas e, confrontando com o jogador II, apenas na estratégia II_2, tem-se:

$$\textit{payoff} \text{ de } I =$$

$$0,7 \cdot (I_1 \times II_2) + 0,3 \cdot (I_2 \times II_2)$$

$$= 0,7 \cdot (\frac{5}{6}) + 0,3 \cdot (\frac{1}{2})$$

$$= \frac{35}{60} + \frac{3}{20} = \frac{22}{30}$$

Assim, o jogador I terá sucesso com seus aviões em $\frac{22}{30}$ das vezes que atacar as bases usando essas estratégias e os percentuais de abordagens.

Suponhamos, para fins de comparação, uma outra situação em que o jogador I designe um percentual de ataques para as duas estratégias possíveis: 50% para I_1 e 50% para I_2. Com o mesmo raciocínio anterior, tem-se:

$$\textit{payoff} \text{ de } I =$$

$$0,5 \cdot (I_1 \times II_2) + 0,5 \cdot (I_2 \times II_2)$$

$$= 0,5 \cdot (\frac{5}{6}) + 0,5 \cdot (\frac{1}{2})$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}.$$

Dessa vez, o jogador I sairia vencedor em $\frac{2}{3}$ das vezes que atacasse as bases usando o mesmo percentual de estratégias disponíveis.

É possível perceber, portanto, que dependendo da distribuição das probabilidades na escolha das estratégias disponíveis, o resultado do jogo pode ser otimizado.

3.1 Soluções para jogos de duas pessoas com soma zero

Quando um jogador escolhe entre suas estratégias, ele não sabe quais estratégias os outros jogadores escolherão e, por isso, não tem certeza quanto às consequências de suas escolhas.

Para analisar as decisões dos jogadores em um jogo, seria útil então ter uma teoria de tomada de decisão que permita expressar as preferências de um agente sobre escolhas com consequências incertas em termos de sua atitude perante as consequências.

3.1.1 Método Maximin

O **método maximin** trata de um posicionamento conservador dos jogadores, em que os jogadores tentam minimizar suas perdas, através da escolha de uma, entre as estratégias, que sugere ser a "menos pior", em condições analíticas de suas possibilidades de jogo.

Para aplicação desse método é necessário que se crie, em qualquer matriz estabelecida, contendo os confrontos das estratégias dos jogadores, uma nova linha abaixo de todas as outras e uma nova coluna à direita de todas as outras. Após isso, na linha mais inferior colocam-se os maiores valores de cada coluna, enquanto na coluna à direita, colocam-se os menores valores de cada linha.

Como os jogadores são racionais, supõe-se uma postura conservadora que garantirá a eles uma perda ou ganho mínimos, numa estratégia que seja a menos pior entre as mais pessimistas possíveis.

Pode-se ilustrar esse método com o exemplo que se segue.

Exemplo 3.6. *As companhias farmacêuticas:*

A situação do problema foi citado no exemplo 3.2. Nesta continuação da análise do problema, segue tabela completada com os máximos das colunas, os mínimos das linhas e os valores específicos do minimax (menor valor entre os máximos das colunas) e maximin (maior valor entre os mínimos das linhas), em que os valores são expressos em porcentagem:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Min Linha	
A_1	8	-2	9	-3	-3	
A_2	6	5	6	8	5	Maximin
A_3	-2	4	-9	5	-9	
Max Coluna	8	5	9	8		
		Minimax				

Tabela 5: Método Maximin das companhias farmacêuticas

A solução do jogo é baseada no princípio da "Melhor entre as Piores". Se a companhia A escolher a estratégia A_1, então, independente da estratégia que B escolha, o pior que pode acontecer é A perder 3% do seu mercado para B. Isto é representado pelo valor mínimo dos elementos da matriz na linha 1.

Similarmente, se A escolher a estratégia A_2, o pior que pode acontecer é A ganhar 5% do mercado de B, e se A escolher a estratégia A_3, o pior que pode acontecer é A perder 9% do seu mercado para B. Estes resultados são listados na coluna "Min Linha" da matriz. Para obter a "Melhor entre as Piores", a companhia A escolhe a estratégia A_2, porque esta representa o valor máximo entre os valores mínimos (Maximin).

Uma vez que a matriz de payoff é para A o critério de "Melhor entre as Piores", para as estratégias da companhia B, basta determinar o valor mínimo entre os valores máximos (minimax), expressos na matriz como Max Coluna, estipulando a coluna B_2 como a melhor das opções.

A solução ótima do jogo então seleciona as estratégias A_2 e B_2, isto é, ambas as companhias devem anunciar seus produtos na televisão. O payoff será a favor da companhia A, porque seu mercado irá ganhar 5% do mercado de B. Neste caso, é dito que o valor do jogo é 5 (5%) e que A e B estão usando uma Estratégia Pura ou Estratégia Dominante cuja solução é um ponto de sela.

A solução de ponto de sela garante que nenhuma companhia está tentando selecionar uma estratégia melhor. Se B escolher outra estratégia (B_1, B_3 ou B_4), a companhia A pode ficar com a estratégia A_2, a qual garante que B irá perder mais mercado para A (6% ou 8%). Da mesma forma, A não quer usar uma estratégia diferente (A_1 ou A_3) uma vez que se A escolher a estratégia A_3, B pode escolher a estratégia B_3 e ganhar 9% do mercado de A. O raciocínio análogo é verdadeiro para A, se escolher a estratégia A_1. Desta forma, justifica-se o ponto de sela.

3.1.2 Método Gráfico

O **método gráfico** é utilizado em jogos de $2 \times n$, ou seja, um dos dois jogadores só pode ter duas estratégias, enquanto o outro pode ter quantas forem estabelecidas.

É possível calcular as probabilidades de ocorrências dessas estratégias envolvidas e, a partir disso, construir um gráfico analítico para auxiliar na resolução da "melhor jogada".

Como exemplo, pode-se citar:

Exemplo 3.7. *A Empresa de Assessoria Contábil*

Thomas (2003) apresenta o seguinte jogo: uma empresa de Assessoria Contábil (X) gerencia duas companhias: Vôos Noturnos e Negócios Obscuros, que na média pagam de imposto $R\$4000,00$ e $R\$12000,00$ respectivamente, a cada ano. Para cada companhia, a Assessoria Contábil pode admitir e pagar a taxa de imposto verdadeira ou sonegar os impostos para se classificar na faixa de isenção e pagar zero de imposto. O serviço de fiscalização da Receita (Y) só tem recurso para investigar uma das duas companhias a cada ano. Se a Fiscalização investigar uma companhia com sonegação nas contas e descobrir a fraude, a Assessoria Contábil terá que pagar o imposto real mais 50% de multa sobre o imposto real. Mostre que, na média, a Assessoria Contábil pagará $R\$14000,00$ à Fiscalização.

Para resolver este jogo, inicialmente é necessário colocá-lo numa matriz. Sabendo que os dois jogadores envolvidos são a Empresa de Assessoria Contábil e a Fiscalização da Receita, as estratégias de cada um compreendem:

Assessoria Contábil:

X_1) Declarar os dois impostos reais das companhias Vôos Noturnos e Negócios Obscuros.

X_2) Sonegar os dois impostos das companhias Vôos Noturnos e Negócios Obscuros.

X_3) Declarar o imposto real da companhia Vôos Noturnos e sonegar o imposto da companhia Negócios Obscuros.

X_4) Sonegar o imposto da companhia Vôos Noturnos e declarar o imposto real da companhia Negócios Obscuros.

Fiscalização da Receita:

Y_1) Fiscalizar a Companhia Vôos Noturnos.

Y_2) Fiscalizar a Companhia Negócios Obscuros.

Dessa forma, segue a matriz

Analisando a tabela e aplicando as teorias e definições de Jogos, percebe-se que:

	Assessoria X			
Fiscalização Y	X_1	X_2	X_3	X_4
Y_1	16	6	4	18
Y_2	16	18	22	12

Tabela 6: Assessoria Contábil e Fiscalização

Isto é um jogo de soma zero, pois há interação estratégica entre dois jogadores, em que cada jogador visa a otimização de seus resultados, e o que um jogador ganha é o que o outro perde.

Além disso, é um jogo de informação completa, pois todas as estratégias disponíveis para os jogadores são totalmente conhecidas por eles.

Não existe Dominação no jogo, ou seja, não foram encontradas estratégias dominantes e dominadas.

Não existe um máximo das colunas que é o mesmo valor do mínimo das linhas, ou seja, a tabela não possui ponto de sela.

Como existe a aleatoriedade e a relação probabilística nas estratégias de cada jogador, o jogo é, portanto, passível de ser resolvido por uma estratégia mista, em que:

$$y = pY_1 + (1-p)Y_2,$$

com $p \in [0,1]$.

O jogo será analisado em função da probabilidade de se escolher a melhor estratégia em cada coluna, pois trata-se de uma tabela do tipo $2 \times n$. Assim, $G(p, X)$:

$$G(p, X_1) = 16p + (1-p) \cdot 16 = 16$$
$$G(p, X_2) = 6p + (1-p) \cdot 18 = 18 - 12p$$
$$G(p, X_3) = 4p + (1-p) \cdot 22 = 22 - 18p$$
$$G(p, X_4) = 18p + (1-p) \cdot 12 = 12 + 6p$$

Substituindo as probabilidades limítrofes $p \in [0,1]$:

Para $p = 0$:

$$G(p, X_1) = 16$$
$$G(p, X_2) = 18$$
$$G(p, X_3) = 22$$
$$G(p, X_4) = 12$$

Para $p = 1$:

$$G(p, X_1) = 16$$
$$G(p, X_2) = 6$$

$$G(p, X_3) = 4$$

$$G(p, X_4) = 18$$

A partir da resolução dessas equações é possível determinar o gráfico, definindo as abscissas por $p \in [0, 1]$ e as ordenadas, limítrofes, sendo as estratégias da Fiscalização Y, uma vez que as probabilidades encontradas estão em função da Assessoria Contábil X:

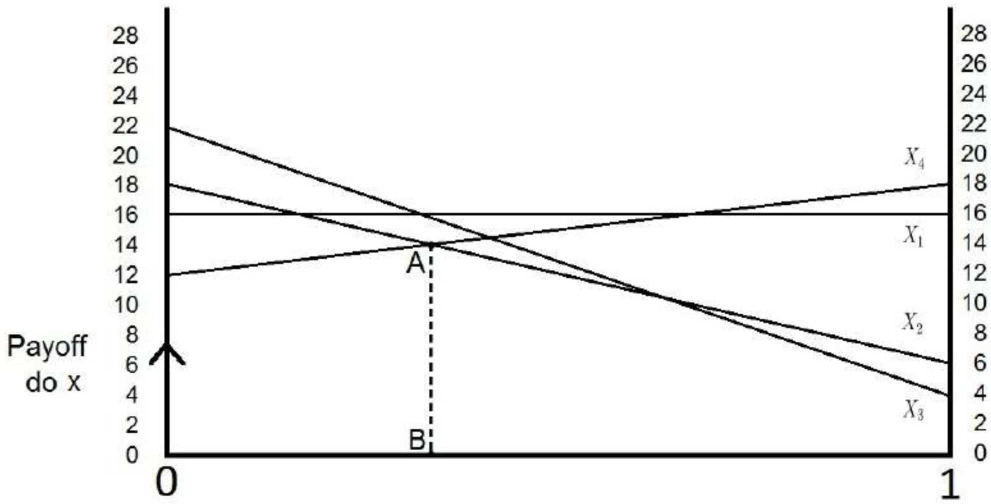

Figura 1: Solução gráfica do exemplo.
Fonte: Games, Theory and applications de L. C. Thomas.

Pelo método gráfico, percebe-se que o segmento AB refere-se ao valor do jogo, em que o A é o ponto mais alto da região mínima do gráfico, limitada pelas estratégias X_4 e X_2, que se encontram no maximo dos mínimos. Ja o ponto B revela o valor da probabilidade, que varia de 0 a 1. Para determinar, portanto, este valor de B, deve-se igualar as estratégias concorrentes (X_2 e X_4) no ponto A:

$$G(p, X_2) = G(p, X_4)$$

$$18 - 12p = 12 + 6p$$

$$12p + 6p = 18 - 12$$

$$18p = 6$$

$$p = \frac{6}{18}$$

$$p = \frac{1}{3}$$

e

$$(1-p) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$(1-p) = \frac{2}{3}$$

Dessa forma, para determinar quanto a Assessoria de Contabilidade pagará, em média, à Fiscalização da Receita, basta substituir a probabilidade encontrada em qualquer uma das estratégias que estão em jogo, após a análise gráfica, ou seja, X_2 e X_4:

$$G_2(p, X_2) = G_2(\frac{1}{3}, X_2)$$

$$G_2(\frac{1}{3}, X_2) = 18 - 12p$$

$$G_2(\frac{1}{3}, X_2) = 18 - 12 \cdot \frac{1}{3}$$

$$G_2(\frac{1}{3}, X_2) = 18 - 4$$

$$G_2(\frac{1}{3}, X_2) = 14$$

e

$$G_4(p, X_4) = G_4(\frac{1}{3}, X_4)$$

$$G_4(\frac{1}{3}, X_4) = 12 + 6p$$

$$G_4(\frac{1}{3}, X_4) = 12 + 6 \cdot \frac{1}{3}$$

$$G_4(\frac{1}{3}, X_4) = 12 + 2$$

$$G_4(\frac{1}{3}, X_4) = 14$$

Concluindo assim uma solução de estratégias mistas com resolução a partir do método gráfico.

4 Exemplos e aplicações da Teoria dos Jogos

Nessa seção reservou-se espaço para ilustrar situações de jogo onde se aplica a Teoria dos Jogos, seguida de análise matemática.

Exemplo 4.1. *Método minimax*

Nos jogos de soma zero com duas pessoas, podemos encontrar a solução pelo método minimax: procuramos minimizar as perdas e maximizar os lucros ao mesmo tempo. Para tanto é necessário que primeiro sejam definidos os padrões de comportamento dos dois jogadores. A Teoria dos Jogos supõe que os jogadores vão agir de forma racional.

Para determinação do resultado, usaremos o problema abaixo, com ganhos do jogador A, que é um jogo de soma zero entre duas pessoas, envolvendo o conjunto de estratégias puras em que o jogador A pode responder A_1, A_2 ou A_3 e o jogador B, B_1 ou B_2, com a seguinte matriz de resultados com valores dos ganhos do jogador A.

		Jogador B		
		B1	B2	Minimo da linha
Jogador A	A1	9	2	2
	A2	8	6	6 (Maximin)
	A3	6	4	4
Máximo da coluna		9	6 (Minimax)	

Figura 2: Tabela Minimax

Análise

Suponha que o jogador A começa o jogo sabendo muito bem que, para qualquer estratégia adotada por ele, o jogador B irá selecionar uma estratégia que irá minimizar o resultado de A. Se A selecionar a estratégia A_1 então B irá selecionar B_2 para que A obtenha ganho mínimo. Da mesma forma, se A escolhe A_2, B escolhe B_2. Naturalmente, A gostaria de maximizar o seu ganho, maximin, que é o maior dos mínimos da linha. Da mesma forma, B irá minimizar sua perda, o que chamamos de minimax.

Podemos observar que o máximo da linha e o mínimo da coluna são iguais. Desta forma, o par (A_2, B_2) é o ponto de sela. Assim, concluímos que A_2 é a melhor estratégia a ser adotada pelo jogador A e B_2 é a melhor estratégia a ser adotada pelo jogador B.

Exemplo 4.2. *Pedra, papel, tesoura.*

São três elementos: pedra, papel e tesoura. A pedra, representada pelo punho fechado; papel, mão aberta; e tesoura, os dedos indicador e médio formam um V. Regras básicas: dado um sinal, cada um dos jogadores apresenta um elemento. Pedra perde para papel, o papel embrulha a pedra; papel perde para tesoura, esta corta o primeiro; e, finalmente, a tesoura perde para a pedra, que quebra aquela.

Para o jogo acima considere:

i) Ganha = 1;

Figura 3: pedra, papel e tesoura

ii) Perde = -1;
iii) Empate = 0.

Assim, a tabela de ganhos para o jogo é representada a seguir:

	Jogador II		
Jogador I	Pedra	Papel	Tesoura
Pedra	0,0	-1,1	1,-1
Papel	1,-1	0,0	-1,1
Tesoura	-1,1	1,-1	0,0

Tabela 7: Tabela pedra, papel e tesoura

No jogo pedra, papel, tesoura há as seguintes possibilidades:
i) (pedra; pedra) = (0; 0). Dá empate;
ii) (pedra; papel) = (-1; 1). O jogador II ganha;
iii) (pedra; tesoura) = (1;-1). O jogador I ganha;
iv) (papel; pedra) = (1;-1). O jogador I ganha;
v) (papel; papel) = (0; 0). Dá empate;
vi) (papel; tesoura) = (-1; 1). O jogador II ganha;
vii) (tesoura; pedra) = (-1; 1). O jogador II ganha;
viii) (tesoura; papel) = (1;-1). O jogador I ganha;
ix) (tesoura; tesoura) = (0; 0). Dá empate.

Pode-se simplificar a tabela, levando-se em conta apenas os ganhos do jogador I, da seguinte forma:

	Jogador II		
Jogador I	Pedra	Papel	Tesoura
Pedra	0	-1	1
Papel	1	0	-1
Tesoura	-1	1	0

Tabela 8: Tabela pedra, papel e tesoura

Assim, observa-se que em três possibilidades, mais especificamente na diagonal principal da matriz (i,v e ix), há somente empates, o que satisfaz um equilíbrio do jogo nessa diagonal.

Exemplo 4.3. *Aviões e baterias de mísseis*

Conforme no exemplo 3.5, a situação do problema e as estratégias mistas já foram citadas e analisadas, descrevendo a seguinte matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} II_1 & II_2 & II_3 & II_4 & II_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{array} \tag{5}$$

Analisando as estratégias, é fácil ver que II_3 domina II_4 e II_5, já que essas últimas duas estratégias são exageradamente negativas para o jogador II. Então tem-se o jogo reduzido:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} II_1 & II_2 & II_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{array} \tag{6}$$

Se a estratégia ótima de I é $(x, 1–x)$, então contra II_1 o pagamento é $0 \cdot x + 1 \cdot (1–x) = 1–x$;contra II_2 isso é $\frac{5}{6} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (1–x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot x$, e contra II_3 isso é $\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{4} \cdot (1–x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot x$. É possível mostrar essas funções graficamente, traçando cada pagamento como uma função de x, como na figura a seguir:

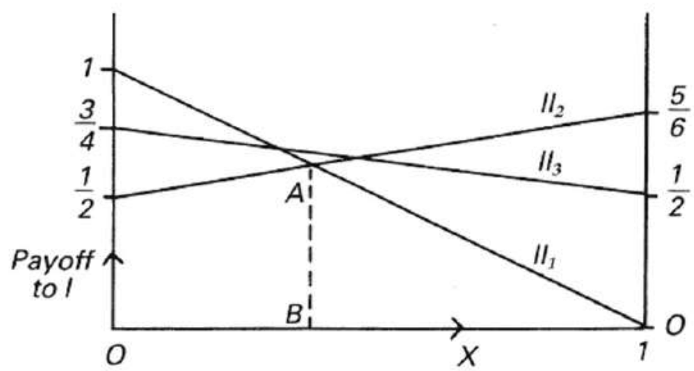

Figura 4: Solução Gráfica do Exemplo

Para cada valor de x, o eixo das linhas naquele ponto denota o pagamento de cada uma das estratégias de II contra $(x, 1–x)$ para I. I está preocupado a respeito de seu último pagamento, quando ele joga uma estratégia em particular, que é a mais baixa das três linhas naquele ponto. Ele quer escolher x para maximizar o seu menor pagamento, *i.e.* maxixmin $(1–x, \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot x, \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cdot x)$. Isso está no ponto A, em que o vértice mais baixo do triângulo(mais baixo das três linhas em cada ponto) é o mais alto de interseção dos menores pagamentos. A distância AB é o valor do jogo, v, e $x = OB$ dá a estratégia ótima para I.

Após todas as explanações em torno da Teoria dos Jogos, propõe-se fazer uma aproximação dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental com a teoria a partir de um desafio realizado em sala de aula, a ser apresentado na próxima seção.

5 Estudo de caso

Para a realização do estudo de caso, foram selecionadas uma turma de 6º ano com um total de 36 alunos e uma turma de 7º ano com um total de 40 alunos, ambas do ensino fundamental II, com idades entre 11 e 13 anos da rede SESI de ensino de Sete Lagoas, MG. Nas aulas em questão nao houve ausentes.

Inicialmente, teve-se o cuidado em preparar a turma para a oficina, deixando explícita a ideia de que se tratava de uma atividade de aprendizagem séria e não apenas um momento de descontração, por se tratar de um jogo matemático desenvolvido para despertar o raciocínio lógico – matemático, numa situação de disputa.

Aos alunos foi repassado que o desafio matemático tinha como propósito pré-estabelecido escolher a melhor estratégia para maximizar ganhos e minimizar perdas, numa situação envolvendo duas empresas hipotéticas X e Y (alunos jogadores as representando).

5.1 Oficina Teoria dos Jogos – Aula Prática

Com a turma organizada para a atividade, foi exposta a intenção do jogo, conforme expressa a tabela 9.

	Estratégias de Y		
Estratégias de X	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	$(-300, +300)$	$(+200, -200$	$(+400, -400)$
X_2	$(+700, -700)$	$(-200, +200)$	$(-100, +100)$
X_3	$(+800, -800)$	$(+1000, -1000)$	$(+700, -700)$
X_4	$(+500, -500)$	$(+800, -800)$	$(+600, -600)$

Tabela 9: Apresentação da atividade em sala de aula.

Duas empresas, X e Y, disputando um mercado como concorrentes, tinham as estratégias expressas na tabela. As estratégias da empresa X estavam nas linhas X_1, X_2, X_3 e X_4 e as estratégias da empresa Y estavam nas colunas Y_1, Y_2 e Y_3. Os valores expressos dentro dos parênteses, em cada cédula da tabela, eram verificados em ordem alfabéticas, ou seja, o primeiro sempre se referia aos ganhos ou perdas da empresa X e o segundo sempre se referia aos ganhos ou perdas da empresa Y. A meta de cada empresa era maximizar ganhos ou minimizar perdas ao final do acúmulo de jogadas. A cada rodada, dois alunos quaisquer seriam chamados ao quadro e jogariam por alguma empresa, escolhida de forma aleatória. A escolha da estratégia de cada aluno pelas empresas X e Y seria dita em voz alta e escrita no quadro por eles, com respostas simultâneas. O professor registraria no quadro a jogada de cada um e estes justificariam o porquê da escolha, sendo essa justificativa aberta, como por exemplo, não saber o motivo da escolha. Nada mais foi passado aos alunos sobre Teoria dos

Jogos.

Na turma de 6º ano

Após as primeiras rodadas do jogo, alguns alunos do 6º ano escolheram as estratégias de maneira displicente, sem entender bem que se tratava de um jogo lógico e estratégico, apenas participando da atividade e analisando o resultado final da jogada. Essa postura pode ser justificada pela pouca maturidade lógico-matemático-estratégica, pelo pouco conhecimento deles sobre o que venha a ser estratégia ou mesmo por talvez ser a primeira vez em contato com uma atividade dinâmica e que exige reflexão e raciocínio lógico-matemático.

No momento em que os alunos começaram a entender a dinâmica do jogo, compreendendo o resultado das jogadas que escolheram, passaram a analisar as jogadas anteriores e assim, fizeram escolhas melhores, que na maioria das vezes era a estratégia (X_3, Y_3). Na figura 5, segue foto de dois alunos do 6º ano durante o jogo.

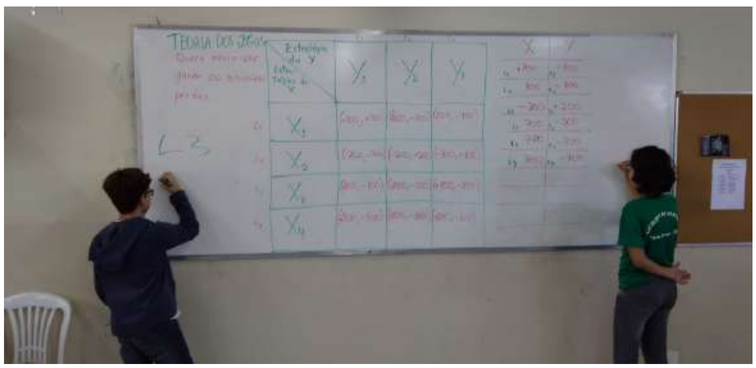

Figura 5: alunos do 6º ano na oficina Teoria dos Jogos.

Como a turma tem 36 alunos, foram feitas 18 rodadas, em que 10 rodadas apontaram para a solução do jogo, ou seja, 55%, cujo ponto de sela era o par ordenado (X_3, Y_3). Essas escolhas ficaram concentradas nas rodadas finais, quando os alunos perceberam a estratégia que seria a menos arriscada para ambos os jogadores.

A dinâmica teve participação ativa de todos os alunos no momento em que as duplas iriam ao quadro escolher a sua estratégia, a partir da empresa designada para ele, X ou Y.

Muitos alunos opinaram de forma correta, seja por atentar para uma estratégia dominada ou dominante, seja para atentar ao fato de que o jogo estava benéfico para a empresa X.

Porém, como a turma tem um perfil de alunos mais concentrados, no momento da escolha da estratégia de cada um dos alunos da dupla jogadora, todos os outros alunos faziam silêncio para ouvir e ler a jogada de cada um, já que ele falava em voz alta e escrevia no quadro a sua estratégia, para a empresa pela qual iria jogar. Após essas escolhas é que a turma levantava a mão para opinar ou perguntar alguma coisa relacionada à tabela ou à rodada anterior.

Na turma de 7º ano

Na turma do 7º ano, com 40 alunos, a atividade já fluiu com melhores resultados. Como os alunos já começam a se familiarizar com conceitos matemáticos como números inteiros (negativos), equações do 1º grau e grandezas proporcionais, perceberam o intuito do jogo mais rapidamente.

O envolvimento da turma e a atenção e análise das opções escolhidas pelas duplas fez com que o jogo funcionasse de forma dinâmica, com argumentações dos alunos em relação às decisões de quem estava jogando no momento da rodada.

Em poucas jogadas, a turma chegou ao resultado ótimo do jogo (ponto de sela) com quase unanimidade das escolhas a partir da 13ª dupla. Os alunos que iriam contra o “acordado” pela turma, justificavam suas escolhas com argumentos perfeitamente aceitáveis na Teoria dos Jogos, ou seja, com o intuito de ganhar mais ou perder menos do que uma escolha racional, conservadora, mas sabendo que iriam correr mais riscos prejudiciais do que o ponto de sela.

Dessa forma, das 20 duplas que jogaram com as empresas X e Y, 13 escolheram as estratégias (X_3, Y_3), configurando 65% das escolhas voltadas para o ponto de sela do jogo. Durante a aula no 7º ano, algumas argumentações dos alunos foram anotadas no quadro, para organizar a participação ativa e esclarecer o que muitos alunos estavam dizendo ao mesmo tempo.

Dentre várias observações, anotou-se, por exemplo, que o jogo era injusto para a empresa Y (análise de jogo com viés para a empresa X). Também foi verificado que se a empresa X escolhesse a estratégia X_3, sempre ganharia o jogo (análise do ponto de sela). Outra aluna afirmou que a empresa X deveria escolher somente entre as estratégias X_3 e X_4 (análise de dominação de estratégias).

A turma ainda levantou as matérias envolvidas na dinâmica e já conhecidas por ela, como: saldo financeiro, números negativos e números simétricos. Não foi dada nenhuma dica quanto às estratégias para jogar, as observações levantadas ou as matérias observadas no jogo, mas intuitivamente, o conceito de par ordenado, de matriz $m \times n$ e outras matérias relacionadas também foi absorvido com substancial aprendizado pela turma do 7º ano. Na figura 6, segue foto de dois alunos do 7º ano durante o jogo.

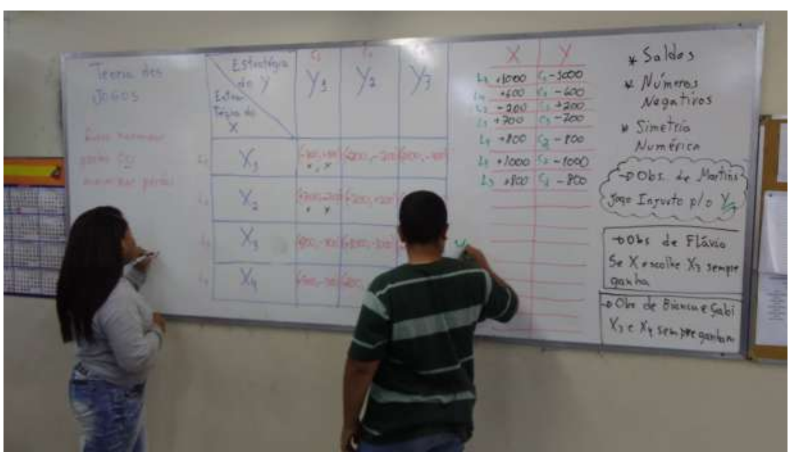

Figura 6: alunos do 7º ano na oficina Teoria dos Jogos.

Ao término da oficina, em ambas as turmas, para fixação do conhecimento e para tirar dúvidas dos alunos que não compreenderam bem por que as suas escolhas não descreveram a melhor jogada, foi apresentada uma nova situação mais simplificada pelo professor, onde foi mostrado aos alunos os resultados possíveis até que se chegue ao ponto de sela. Na tabela 10, segue situação demonstrada.

	Estratégias de Y		
Estratégias de X	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	$(-3, 3)$	$(2, -2$	$(4, -4)$
X_2	$(7, -7)$	$(-2, 2)$	$(-1, 1)$
X_3	$(8, -8)$	$(1, -1)$	$(7, -7)$
X_4	$(5, -5)$	$(8, -8)$	$(6, -6)$

Tabela 10: Explicação final após oficina Teoria dos Jogos.

Como forma de finalizar a pesquisa prática, foi solicitado a dois representantes dos alunos que participaram das oficinas de ambas as turmas, que avaliassem a experiência vivenciada. As opiniões dos mesmos são apresentadas a seguir.

5.2 As impressões dos alunos sobre a Teoria dos Jogos

Dentre os escolhidos, foi analisado seu perfil como aluno para melhor compreender a sua avaliação em torno do jogo proposto. As opiniões foram transcritas na íntegra.

5.2.1 Alunos do 6º ano

O aluno 6.1

Dos alunos do 6º ano, ele se destaca por ser bastante questionador, gosta de entender a matemática. Ele descreve a atividade na sua percepção com propriedade, pois analisou o comportamento dos colegas e compreendeu o objetivo do jogo: "maximizar ganhos, minimizar perdas".

> "O professor escreveu no quadro e já foi chamando dois a dois alunos. Não entendemos muito no começo, mas fomos escolhendo as jogadas de qualquer jeito. Como todos os alunos da sala participaram, deu pra notar que algumas das estratégias escolhidas não davam resultado. E começamos a focar duas estratégias X_3 e a X_4 que eram melhores para a empresa X. Eu prestei mais atenção na empresa X, porque ela tinha mais chance de lucros do que a empresa Y. Jogo legal, diferente e inteligente. Poderia ter mais desses pra gente resolver".

O aluno 6.2

O aluno é bem concentrado e esforçado nas aulas, tendo bom rendimento em todas as matérias e sendo referência e representante de turma durante todo o ano letivo. Ele participou da jogada em uma das primeiras rodadas, mas se manteve atento e participativo após se sentar novamente, quando concluiu após o término do jogo:

> "Não joguei bem quando fui ao quadro porque eu estava com a empresa Y e tentei ganhar $R\$300,00$ na estratégia Y_1, que era o maior ganho possível da empresa Y. Só que meu colega escolheu a estratégia X_3, e eu perdi $R\$800,00$. Depois que todos jogaram o professor analisou as estratégias e aí sim eu entendi o motivo porque eu perdi. Se eu fosse jogar de novo jogaria na Y_3, pra perder só $R\$700,00$, já que meus colegas da X nunca jogariam na X_1. Gostei da Teoria dos Jogos, porque eu pensei que só falava de jogos, mas o professor explicou que não. A teoria fala sobre decisões nas empresas, na economia e até em situações de conflitos de guerra. Super legal mesmo, eu adorei!".

5.2.2 Alunos do 7º ano

Dos alunos que melhor entenderam a atividade e souberam se expressar com justificativas plausíveis à tomada de decisão, foi possível identificar dois alunos que se destacaram na percepção do jogo e no modo como analisaram a situação proposta. De modo que coube registrar suas argumentações, transcritas a seguir:

A aluna 7.1

Bastante dinâmica e participativa, a aluna tem um bom raciocínio lógico-matemático. Observadora, conseguiu identificar a complexidade do desafio lançado e entendeu que as estratégias e escolhas dos jogadores devem ser pensadas e exatas. Na sua vez, expôs a seguinte observação:

> "Achei muito interessante esse tipo de jogo. De cara, parece ser um jogo simples, que se escolhe qualquer um e vai na sorte. Mas não é simples! É complicado e se a gente não tem atenção, não observa as opções, acaba escolhendo a pior ação e perde o jogo. Percebi logo de início que a melhor jogada para qualquer uma das duas empresas era a (X_3, Y_3). Depois o professor explicou que não se tratava da melhor estratégia, mas a mais racional, conservadora, porque dependendo do risco que a empresa corresse, pode ser que ela ganhasse mais ou perdesse mais e esse era o objetivo. Fiquei querendo jogar novamente e espero ter essa oportunidade".

O aluno 7.2

Como foi um dos últimos a jogar, já tinha entendido que a estratégia mais utilizada pelos colegas e a mais racional era a (X_3, Y_3), que era o ponto de sela. Porém, quis arriscar a ganhar mais ainda, já que estava com a empresa X.

> "Joguei a estratégia X_4, porque eu queria ganhar $R\$800,00$, pois achei que a minha adversária poderia escolher Y_2. Como o jogo era ganhar mais, joguei apostando nisso, mas não deu certo, porque ela escolheu a Y_3 e eu ganhei só $R\$600,00$. Se eu tivesse escolhido a X_3 eu teria garantido os $R\$700,00$ com certeza. Então, com a jogada dela perdi $R\$100,00$ de diferença. Gostei do desafio, leva a gente a observar as possibilidades dos jogadores, prende nossa atenção no jogo".

Numa análise sobre os resultados obtidos durante a atividade proposta para os 6º e 7º anos do ensino fundamental II, pode-se apontar que cabe a inserção da Teoria dos Jogos no ensino da matemática, como um tema de reforço para as matérias do ano letivo e de suporte para as séries posteriores, feito de forma lúdica e dinâmica, com aprendizados facilitados pela estrutura da situação, pois os alunos já começam a desenvolver um olhar crítico e um raciocínio lógico em situações de análises e cálculos, na busca de respostas e solução de problemas.

5.3 Proposta de Oficina para Ensino Médio

Numa proposta de se aplicar a Oficina em séries mais avançadas,pode-se desenvolver o estudo teórico e prático da Teoria dos Jogos com mais especificações. Para tal seguem-se as sugestões possíveis:

- Definições e exemplos sobre Teoria dos Jogos
- Aplicação de matrizes formais, além de tabelas
- Elementos da matriz apenas com os valores do jogador da linha
- Aplicação do método Maximin
- Determinação do ponto de sela
- Identificação e aplicação de estratégias mistas
- Análise e cálculo probabilístico
- Aplicação do método gráfico

Considerações Finais

O estudo em torno da Teoria dos Jogos apontou para as inúmeras possibilidades de se trabalhar a aprendizagem matemática. Pode-se considerar que o objetivo principal do estudo foi alcançado no momento em que a oficina realizada foi bem acolhida pelos alunos, que ficaram realmente empolgados e interessados em desvendar o mistério escondido na tabela, solucionando o desafio.

Pode-se afirmar que os alunos assimilaram com muita facilidade a dinâmica do jogo, bem como os processos de soma zero e todas as duas turmas conseguiram fazer com que a maioria das jogadas chegassem ao resultado final, que era ter encontrado o ponto de sela.

As duas turmas também conseguiram descartar estratégias dominadas e focar nas dominantes. Após a análise das estratégias adotadas por eles no decorrer da atividade, puderam entender os significados dos riscos e escolhas conservadoras, fazendo isso de forma natural após as observações dos outros colegas que estavam jogando. Foram lapidando o conhecimento da matriz dos jogos a cada rodada de dois alunos no quadro, e rápida e frequentemente participavam das escolhas com argumentos totalmente plausíveis.

Essa percepção do jogo pela maioria dos alunos surpreende, visto que eles ainda não tiveram contato com os conteúdos matemáticos, embutidos na tabela, como matriz, números simétricos, números negativos, par ordenado, cálculos financeiros, raciocínio lógico, ideia de função, etc, mas que fazem parte do currículo escolar do ano letivo e de séries mais avançadas.

Avalia-se como positivo o resultado da atividade que fortalece e embasa a defesa da incorporação de jogos matemáticos e da Teoria dos Jogos com mais frequência no ensino fundamental, fomentando o raciocínio lógico e a absorção de conteúdos matemáticos de forma natural, lúdica e significativa na construção do conhecimento matemático completo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por mais uma conquista, marcada por situações difíceis que foram vencidas pelo meu desejo de ser um profissional cada vez melhor.

Aos meus pais Eduardo e Regina, que sempre me apoiaram, foram exemplos e verdadeiros heróis em toda minha vida.

À Adriana, companheira de todas as horas, que se mostrou tão forte durante todo o período no qual me dediquei ao mestrado.

Ao meu filho Artur, por ser o meu remédio diário e compreender o pouco tempo que lhe dediquei. Às minhas filhas recém-nascidas Alice e Ana Laura, que já me fazem mais feliz.

Aos colegas de profissão e colegas de estudo, da graduação, da pós-graduação e do mestrado, que se tornaram verdadeiros amigos.

Aos professores da UFSJ, que foram fundamentais para a assimilação, aprendizagem e estudos intensivos durante o mestrado.

Agradeço aos professores Dr. Telles Timóteo da Silva e Dra. Andréia da Silva Coutinho, que compuseram a banca e compartilharam conhecimentos e sugestões valiosas para melhorias e continuação da pesquisa.

À professora e coordenadora Dra. Mariana Garabini Cornelissen Hoyos, que mesmo com as dificuldades encontradas, sempre foi amiga, me apoiou e me deu todo o suporte necessário para o curso e finalização do mestrado.

Ao professor orientador Dr. Mauricio Reis e Silva Junior, pelo imensurável compartilhamento de ideias e conhecimentos, pela confiança na minha capacidade e pela humanidade e amizade dedicadas, que superaram a relação de professor-aluno.

A todos os meus alunos, por me motivarem a cada dia e fazerem me sentir realizado profissionalmente. Em especial aos alunos do SESI, por se mostrarem tão motivados e interessados em todos os projetos propostos.

Ao SESI Sete Lagoas, Mateus, Evânia e toda a equipe, que sempre me apoiaram, confiaram e serviram de exemplos para mim.

E agradeço também à CAPES e à SBM, por tornarem possível a realização de um verdadeiro sonho.

Referências

[1] ALENCAR Andressa Gomes, OMAKI, Eduardo Tadayoshi. DRUMOND JUNIOR, Marcos Antônio. PERES, Inajara de Moraes. Um Olhar da Teoria dos Jogos Sobre a Fusão da Sadia com a Perdigão. XXXIV Encontro da ANPAD. 25 a 29 dezembro de 2010. Disponível em: http://www.anpad.org.br/admin/pdf/eso2422.pdf. Acesso em: 18.01.2017.

[2] ALMEIDA, Alecsandra Neri. Teoria dos Jogos: As origens e os fundamentos da Teoria dos Jogos de UNIMESP - Centro Universitário Metropolitano de São Paulo Novembro/2006. Disponível em: http://www.gilmaths.mat.br/Artigos/Teoria%20dos%20Jogos.pdf. Acesso em: 12.01.2017.

[3] BÊRNI, D. de Á. Teoria dos jogos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2004.

[4] BARRRICHELO, Fernando. Apêndices para mentes curiosas. Onde eu uso Teoria dos Jogos na prática. 2010. In: A Ciência da Estratégia: Insights da Teoria dos Jogos para competir e colaborar. Disponível em: http://www.cienciadaestrategia.com.br/teoriadosjogos/capitulo.asp?cap=047. Acesso em: 08.01.2017.

[5] CARMICHAEL, Fiona. A Guide to Game Theory. Harlow: Financial Times Prentice Hall – Pearson Education, 2005. In: ALENCAR Andressa Gomes, OMAKI, Eduardo Tadayoshi. DRUMOND JUNIOR, Marcos Antônio. PERES, Inajara de Moraes. Um Olhar da Teoria dos Jogos Sobre a Fusão da Sadia com a Perdigão. XXXIV Encontro da ANPAD. 25 a 29 dezembro de 2010. Disponível em: http://www.anpad.org.br/admin/pdf/eso2422.pdf. Acesso em: 18.01.2017.

[6] FIANI, Ronaldo.Teoria dos Jogos com aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais. 2ª ed.rev. e atual. Rio de Janeiro, R.J.: Elsevier, 2006.

[7] FREIRE, Diogo. John Nash fala sobre Teoria dos Jogos e novas pesquisas. In: Ciência, Tecnologia. Revista Exame.com Agosto / 2014. Disponível em: http://exame.abril.com.br/ciencia/john-nash-fala-sobre-teoria-dos-jogos-e-novas-pesquisas/. Acesso em: 08.01.2017.

[8] MOREIRA, Daniel Augusto. Pesquisa Operacional: curso preparatório. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

[9] RÊGO, Leandro Chaves. Notas de Aula do Curso de Pós-Graduação em Teoria dos Jogos, 2011.1. 119p. Disponível em: http://www.de.ufpe.br/ leandro/AulasTeoriadosJogos2011-1.pdf. Acesso em: 03.03.2017.

[10] SARTINI, Brígida Alexandre. GARBUGIO, Gilmar. BORTOLOSSI, Humberto José. SANTOS, Polyane Alves. BARRETO, Larissa Santana. Uma Introdução a Teoria dos Jogos. II Bienal da SBM Universidade Federal da Bahia 25 a 29 de outubro de 2004.

Disponível em: https://www.ime.usp.br/ rvicente/IntroTeoriaDosJogos.pdf. Acesso em: 12.012017.

[11] THOMAS. L. C. Games, Theory and Applications. New York: Dover Publications Inc..2003.

[12] VITORINO FILHO, Valdir Antonio. SACOMANO NETO, Mário. ELIAS, Jorge José. Teoria dos Jogos: uma abordagem exploratória. Revista Conteúdo, Capivari, v.1, n.2, jul./dez. 2009 – ISSN 1807-9539. Disponível em: http://www.conteudo.org.br/index.php/conteudo/article/viewFile/24/16. Acesso em: 15.01.2017.

AUTORIZAÇÃO DOS PAIS/RESPONSAVEIS PARA PARTCIPAÇÃO EM ESTUDO

AUTORIZAÇÃO PARA PARTICIPAÇÃO EM ESTUDO DE CASO SOBRE A TEORIA DOS JOGOS JUNTO A ALUNOS DO SESI SETE LAGOAS/MG, 2016.

Solicito dos pais/ responsáveis pelos alunos das turmas de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental do SESI Sete Lagoas/MG, autorização para a participação de seu(a) filho(a) no estudo de caso sobre **A TEORIA DOS JOGOS** a ser desenvolvido em sala de aula com alunos de ensino fundamental pelo professor **André Tavares Gonçalves**, cuja participação resultará no TCC - Trabalho de Conclusão de Curso de **Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT)** - Campus Alto Paraopeba da **UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI – UFSJ.**

O objetivo do estudo centra-se na avaliação do comportamento dos alunos durante uma situação de jogo, captando suas percepções em torno da tomada de decisão e estratégias para solucioná-lo. Serão feitos registros fotográficos, no entanto, serão resguardadas informações pessoais dos alunos, sendo transcritas apenas as observações feitas pelos mesmos utilizando-se para identificação o primeiro nome, idade e turma.

Grato pela colaboração, solicito assinatura dos pais/ responsáveis.

Atenciosamente,

André Tavares Gonçalves
Professor de Matemática SESI/ Sete Lagoas

Nome do aluno(a): Emily Rosane Dias Andrade

Adele Cruzo Dias Andrade
ASSINATURA

AUTORIZAÇÃO DOS PAIS/RESPONSAVEIS PARA PARTCIPAÇÃO EM ESTUDO

AUTORIZAÇÃO PARA PARTICIPAÇÃO EM ESTUDO DE CASO SOBRE A TEORIA DOS JOGOS JUNTO A ALUNOS DO SESI SETE LAGOAS/MG, 2016.

Solicito dos pais/ responsáveis pelos alunos das turmas de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental do SESI Sete Lagoas/MG, autorização para a participação de seu(a) filho(a) no estudo de caso sobre **A TEORIA DOS JOGOS** a ser desenvolvido em sala de aula com alunos de ensino fundamental pelo professor **André Tavares Gonçalves**, cuja participação resultará no TCC - Trabalho de Conclusão de Curso de **Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT)** - Campus Alto Paraopeba da **UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI – UFSJ.**

O objetivo do estudo centra-se na avaliação do comportamento dos alunos durante uma situação de jogo, captando suas percepções em torno da tomada de decisão e estratégias para solucioná-lo. Serão feitos registros fotográficos, no entanto, serão resguardadas informações pessoais dos alunos, sendo transcritas apenas as observações feitas pelos mesmos utilizando-se para identificação o primeiro nome, idade e turma.

Grato pela colaboração, solicito assinatura dos pais/ responsáveis.

Atenciosamente,

André Tavares Gonçalves
Professor de Matemática SESI/ Sete Lagoas

Nome do aluno(a): Gabriel Fernandes Garcia

Lilian R. Fernandes Garcia
ASSINATURA

AUTORIZAÇÃO DOS PAIS/RESPONSAVEIS PARA PARTCIPAÇÃO EM ESTUDO

AUTORIZAÇÃO PARA PARTICIPAÇÃO EM ESTUDO DE CASO SOBRE A TEORIA DOS JOGOS JUNTO A ALUNOS DO SESI SETE LAGOAS/MG, 2016.

Solicito dos pais/ responsáveis pelos alunos das turmas de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental do SESI Sete Lagoas/MG, autorização para a participação de seu(a) filho(a) no estudo de caso sobre **A TEORIA DOS JOGOS** a ser desenvolvido em sala de aula com alunos de ensino fundamental pelo professor **André Tavares Gonçalves**, cuja participação resultará no TCC - Trabalho de Conclusão de Curso de **Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT)** - Campus Alto Paraopeba da **UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI – UFSJ.**

O objetivo do estudo centra-se na avaliação do comportamento dos alunos durante uma situação de jogo, captando suas percepções em torno da tomada de decisão e estratégias para solucioná-lo. Serão feitos registros fotográficos, no entanto, serão resguardadas informações pessoais dos alunos, sendo transcritas apenas as observações feitas pelos mesmos utilizando-se para identificação o primeiro nome, idade e turma.

Grato pela colaboração, solicito assinatura dos pais/ responsáveis.

Atenciosamente,

André Tavares Gonçalves
Professor de Matemática SESI/ Sete Lagoas

Nome do aluno(a): Theodoro Augusto FARIA Braz

ASSINATURA

AUTORIZAÇÃO DOS PAIS/RESPONSAVEIS PARA PARTCIPAÇÃO EM ESTUDO

AUTORIZAÇÃO PARA PARTICIPAÇÃO EM ESTUDO DE CASO SOBRE A TEORIA DOS JOGOS JUNTO A ALUNOS DO SESI SETE LAGOAS/MG, 2016.

Solicito dos pais/ responsáveis pelos alunos das turmas de 6° e 7° anos do Ensino Fundamental do SESI Sete Lagoas/MG, autorização para a participação de seu(a) filho(a) no estudo de caso sobre **A TEORIA DOS JOGOS** a ser desenvolvido em sala de aula com alunos de ensino fundamental pelo professor **André Tavares Gonçalves**, cuja participação resultará no TCC - Trabalho de Conclusão de Curso de **Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT)** - Campus Alto Paraopeba da **UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI – UFSJ.**

O objetivo do estudo centra-se na avaliação do comportamento dos alunos durante uma situação de jogo, captando suas percepções em torno da tomada de decisão e estratégias para solucioná-lo. Serão feitos registros fotográficos, no entanto, serão resguardadas informações pessoais dos alunos, sendo transcritas apenas as observações feitas pelos mesmos utilizando-se para identificação o primeiro nome, idade e turma.

Grato pela colaboração, solicito assinatura dos pais/ responsáveis.

Atenciosamente,

André Tavares Gonçalves

Professor de Matemática SESI/ Sete Lagoas

Nome do aluno(a): Eliã Carlos B. Andrade

Lília A. Beraldo Andrade

ASSINATURA